

## ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MAPLE TRONG TÍNH TOÁN TRỌNG TÂM, KHỐI LƯỢNG VÀ MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT THỂ

ThS. Trần Ngọc Hải

Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Tác giả liên hệ: tnhai.ck@uneti.edu.vn

Ngày nhận: 31/7/2024

Ngày nhận bản sửa: 13/8/2024

Ngày duyệt đăng: 24/9/2024

### Tóm tắt

Trọng tâm, khối lượng và mômen quán tính của vật thể là những thông số thiết yếu trong việc giải quyết các bài toán cơ học ứng dụng. Bài viết này nghiên cứu phương pháp tính toán các thông số này bằng phần mềm toán học Maple, nhằm đơn giản hóa và tăng tốc quá trình tính toán. Quy trình thực hiện bao gồm việc áp dụng các công thức toán học liên quan và sử dụng các lệnh của Maple để lập trình tính toán. Kết quả cho thấy phương pháp này có độ tin cậy cao và cho kết quả tương đương với các phương pháp tính toán truyền thống. Phương pháp tính toán bằng Maple có thể được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau và rất tiện lợi cho sinh viên trong quá trình học tập và nghiên cứu.

**Từ khóa:** Trọng tâm, khối lượng, mômen quán tính, chương trình tính Maple.

### Utilizing Maple Software for Calculating Centroid, Mass, and Moment of Inertia of Objects

MA. Tran Ngoc Hai

University of Economics - Technology for Industries

Corresponding Author: tnhai.ck@uneti.edu.vn

### Abstract

The centroid, mass, and moment of inertia of an object are crucial parameters in solving applied mechanics problems. This paper investigates a method for computing these parameters using the mathematical software Maple to streamline and expedite the calculation process. The procedure involves applying relevant mathematical formulas and utilizing Maple commands for computational programming. The results indicate that this method is highly reliable, and yields results comparable to traditional computational methods. The Maple computational approach can be applied across various fields and proves to be convenient for students in their learning and research endeavors.

**Keywords:** Centroid, mass, moment of inertia, maple software.

### 1. Đặt vấn đề

Trọng tâm, khối lượng, mômen quán tính của vật thể là những thông số thiết yếu phải tính khi giải bài toán cơ học ứng dụng. Đã có nhiều phương pháp tính các thông số trên, ví dụ: Phân chia; Tích phân; Áp dụng các định lý Guyndanh [1-2].

Trong những ví dụ được nêu ra dưới đây, các thông số theo hệ tọa độ cầu, tọa độ cực, v.v.

được tính trực tiếp, khi tính toán cần những biến đổi phức tạp, khó. Hiện ở trong nước, chưa có tài liệu trực tiếp tính các thông số đó dưới dạng chương trình tính dùng Maple.

Bài viết này nghiên cứu phương pháp tính toán các thông số trên bằng phần mềm toán học Maple, nhằm đơn giản hóa và tăng tốc quá trình tính toán. Quy trình thực hiện bao gồm việc áp dụng các công thức toán học liên quan và sử

dùng các gói công cụ tính, các lệnh của Maple để lập trình tính toán. Phương pháp tính có độ tin cậy cao, cho cùng kết quả so với các phương pháp tính truyền thống.

Dưới đây trình bày một số ví dụ, mỗi ví dụ tính bằng hai cách: Tính trực tiếp và viết chương trình tính dùng Maple để dễ so sánh.

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Cơ sở phương pháp tính

Sử dụng kết quả những nghiên cứu cơ học ứng dụng bằng giải tích [1], [3],... ví dụ:

Tùy thông số cần tính, dùng công thức.

Khối lượng của bản D

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy \quad (1)$$

Khối lượng vật thể:

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (2)$$

Với  $p(x, y) dx dy dz$  là khối lượng riêng vật thể tại  $M(x, y, z)$ .

Trọng tâm G của bản D

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ y_G = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy \end{cases} \quad (3)$$

Trọng tâm của vật thể

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_G = \frac{1}{m} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_G = \frac{1}{m} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{cases} \quad (4)$$

Nếu vật thể đồng chất thì không đổi, do đó:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz; y_G = \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz \\ z_G = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz \end{cases} \quad (5)$$

Mômen quán tính của bản D đối với  $Ox$ ,  $Oy$  và gốc tọa độ

$$\begin{cases} I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy; I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy \\ I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy \end{cases} \quad (6)$$

Mômen quán tính vật thể với gốc tọa độ

$$\{I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (7)$$

### 2.2. Sử dụng công thức Guyndanh khi giải bài toán trọng tâm

Các ví dụ [1, trang 106], [2, trang 327] cho phép nhanh chóng tính ra kết quả so với phương pháp trực tiếp tính tích phân... giải bài toán.

### 2.3. Viết chương trình tính trọng tâm, khối lượng,... của vật thể bằng Maple

#### 2.3.1. Các bước viết chương trình tính

a) Mở gói (student), with (plots) [4, trang 126; 143]

b) Đổi biến sang hệ tọa độ (lệnh Changevar)

+ Hệ tọa độ cực: Sử dụng phép đổi biến

$$\{x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi \quad (8)$$

$$\Rightarrow \iint_M f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

+ Hệ tọa độ trụ: dùng phép đổi biến

$$\{x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; z = z \Rightarrow \quad (9)$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

+ Hệ tọa độ cầu: dùng phép đổi biến

$$\{x = r \sin \theta \cos \varphi; y = r \sin \theta \sin \varphi; z = r \cos \theta \quad (10)$$

$$\Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \left( \iiint_V f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, z \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \right) \quad (11)$$

Ví dụ [5, tập 2, trang 121]: Đổi sang tọa độ cực:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy$$

Cách 2: > with(student):

changevar({x=r\*cos(phi), y=r\*sin(phi)},

Doubleint(1/sqrt(4-x^2-y^2), x, y), [r, phi]);

Kết quả :

$$\int \int \frac{|r|}{\sqrt{4-r^2}} dr d\phi$$

c) Lập tích phân: Tùy bài toán cụ thể, chọn

+ Tích phân kép: Dùng lệnh

Doubleint(g(x), x, y);

Doubleint(g, x=a..b, y=c..d);

Doubleint(g, x, y, miền tích phân );

ở đây: g - biểu thức cần tích phân

x, y: biến tích phân

Ví dụ [5, tập 3, trang 97]: Lập biểu thức tích phân, tính:  $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}, D = (1, 2)^2$

Cách 2: > with (student):

Doubleint(1/(x+y)^2, x=1..2, y=1..2):

% = value(%);

Kết quả:

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dx dy = 2 \ln(3) - 3 \ln(2)$$

+ Tích phân bội ba: dùng lệnh

**Tripleint(g(x,y,z), x, y, z)**

**Tripleint(g, x = a..b, z = e..f, y = c..d)**

**Tripleint(g, x, y, z, miền tích phân)**

**Ví dụ** [6, tập 3, trang 205]: Lập biểu thức tích phân, tính:

$$\iiint_V z dx dy dz$$

V là miền xác định bởi:  $0 \leq x \leq 1/4, x \leq y \leq 2x,$

$$0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Cách 2: Tripleint (z, z = 0..sqrt(1-x^2-y^2), y = x..2x, x=0..1/4); %value(%);

Kết quả:  $\int_0^{1/4} \int_x^{2x} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz dy dx = \frac{43}{3072}$

+ Tích phân

Int(expr, x): Ký hiệu tích phân bất định

Int(expr, x=a..b, ...): tích phân xác định

expr: một biểu thức đại số

x: tên biến tích phân; a, b: cận tích phân

**Ví dụ** [6, tập 2, trang 147], Dùng cách 2, Lập

tích phân, tính:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$

Int(1/sqrt(1+x^2)^3, x=0..1): % =value(%);

Kết quả:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

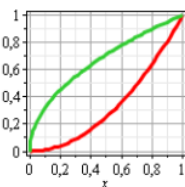
d) **Lập biểu thức dưới dấu tích phân**

Dùng các công thức tính (1)...(11)

e) **Tính giá trị: lệnh**

%=value(%) [4, trang 128]

Ví dụ [7, tập 3, trang 202]. Xác định diện tích bản phẳng giới hạn bởi các đường:  $y^2 = x; x^2 = y$



**Hình 1.** Diện tích giới hạn bởi f(y), g(y)

>With(student): (Cách 2)

f := y → x^2; g := y → sqrt(x); a := solve(f(y) = g(y), x);

plot([f(y), g(y)], x = a[1]..a[2], thickness = 3);

abs(Int(abs(f(y) - g(y)), x = a[1]..a[2])):

% = value(%);

Kết quả chương trình tính

f := y → x^2; g := y → sqrt(x); a := 0, 1

$$\int_0^1 |x^2 - \sqrt{x}| dx = \frac{1}{3}$$

## 2.4. Các ví dụ

**Ví dụ 1** [3, trang 158]: Biết khối lượng riêng của nửa hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$  tại điểm

bất kỳ tỷ lệ với khoảng cách từ đó tới tâm 0.

Hãy tính tọa độ trọng tâm của nửa hình cầu.

**Giải:**

Cách 1: Dùng tích phân bội

Hàm khối lượng riêng

$\rho = (x, y, z) = C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  Ký hiệu V là nửa hình cầu, khối lượng của nửa hình cầu đó bằng:

$$m = \iiint_V C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

Chuyển sang tọa độ cầu, công thức (10)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi; z = r \cos \theta \end{cases}$$

Khi đó miền  $V^*$  tương ứng với V được xác định bởi:

$V^* = \{(\varphi, r, \theta), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$

Suy ra:

$$\begin{aligned} m &= C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= 2C\pi \int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{Ca^4\pi}{2} \end{aligned}$$

Do tính đối xứng, hoành độ và tung độ của trọng tâm:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_V x C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_V y C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = 0$$

Cao độ của trọng tâm:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m} \iiint_V z C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \\ &= \frac{C}{m} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2}{5} a \end{aligned}$$

Cách 2: Dùng Maple, các bước thực hiện

Dùng gói (student) [7].

Chuyển sang tọa độ cầu (changevar) (10)

Lập tích phân bội 3 (Tripleint)

Lập biểu thức tính, công thức (11), (4)

Tính giá trị (%=value(%)) [7]

>With(student):

changevar({x = p \* sin(theta) \* cos(phi), y = p \* sin(theta) \* sin(phi),

Tripleint(sqrt(x^2 + y^2 + z^2), x, y, z), [p, theta, phi]);

m := C \* Tripleint(r^3 \* cos(theta), r = 0..a,

theta = 0..pi/2, phi = 0..2 \* pi); m := value(%);

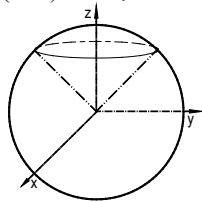
Zc := C/m \* Tripleint(r^4 \* sin(theta) \* cos(theta), r = 0..a,

theta = 0..pi/2, phi = 0..2 \* pi); Zc := value(%);

Kết quả chương trình tính

$$\begin{aligned} & \int \int \int |p|^3 |\sin(\theta)| \, dp \, d\theta \, d\phi \\ m &:= C \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^a r^3 \cos(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi \right); \quad m := \frac{1}{2} C a^4 \pi \\ Z_c &:= \frac{2 \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^a r^4 \sin(\theta) \cos(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi \right)}{a^4 \pi} \\ Z_c &:= \frac{2}{5} a \end{aligned}$$

**Ví dụ 2** [5, tập 3, trang 127]: Xác định trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi mặt nón  $z^2 - x^2 - y^2 = 0, (z > 0)$  và mặt cầu  $z^2 + x^2 + y^2 = 1$



**Hình 2.** Vật thể giới hạn bởi cầu, nón

*Giải:*

Cách 1: Giao tuyến mặt nón và mặt cầu được xác định bởi  $1 - z^2 = z^2 \Rightarrow 2z^2 = 1$

$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , vậy bán kính vectơ của các điểm trên giao tuyến ấy làm với trục Oz góc bằng  $\pi/4$ . Vì lí do đối xứng nên  $x_G, y_G = 0$ .

Chuyển sang tọa độ cầu, Tính  $z_G$  theo công

thức:  $V = \iiint_V r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

Miền V xác định bởi:  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Do đó

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 2\pi \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \pi \end{aligned}$$

Cũng vậy ta có

$$\begin{aligned} \iiint_V z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V r \cos \theta \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Do đó:

$$z_G = \frac{3}{8(2 - \sqrt{2})} = \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Cách 2: Dùng Maple, chương trình tính

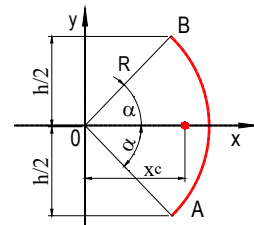
>With(student):

```
changevar({x=r*sin(theta)*cos(phi), y=r*sin(theta)*sin(phi),
z=r*cos(theta)}, Tripleint(sqrt(x^2+y^2+z^2), x,
y, z), [r, theta, phi]);
V:=Tripleint(r^2*sin(theta), r=0..1, theta=0..pi/4, phi=0..2*pi);
theta=0..pi/4, phi=0..2*pi);
C:=Tripleint(r*cos(theta)*r^2*sin(theta), r=0..1,
V:=value(%);
theta=0..pi/4, phi=0..2*pi);
C:=value(%); Zc:=C/V;
```

Kết quả chương trình tính

$$\begin{aligned} & \int \int \int |r|^3 |\sin(\theta)| \, dr \, d\theta \, d\phi \\ V &:= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi \\ V &:= \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{3} \sqrt{2} \pi \\ C &:= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^1 r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi \\ C &:= \frac{1}{8} \pi; \quad ZG := \frac{1}{8} \frac{\pi}{\frac{2}{3} \pi - \frac{1}{3} \sqrt{2} \pi} \\ z_G &= \frac{1}{8} \frac{3}{(2 - \sqrt{2})} = \frac{3}{8} \frac{2 + \sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{3}{8} \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

**Ví dụ 3** [1, trang 105]: Tìm trọng tâm cung tròn đồng chất bán kính R với góc ở tâm là  $2\alpha$  (hình 3)



**Hình 3.** Cung tròn bán kính R

*Giải:* Dùng định lý Guyndanh 1

+ Định lý Guyndanh 1 [1, trang 104]

“Diện tích của mặt tròn xoay sinh ra do một đường cong phẳng AB khi quay quanh trục Oy, nằm trong mặt phẳng chứa đường cong và không cắt đường cong đó, bằng chiều dài của đường cong AB nhân với chu vi của đường tròn do trọng tâm C của đường cong AB vạch ra”:

$$S = 2\pi x_C L$$

Chứng minh: [1, trang 104]

*Giải:* Chọn hệ trục tọa độ như hình 2, cung tròn

có trục  $Ox$  là trục đối xứng do đó trọng tâm  $C$  nằm trên trục  $Ox$ .

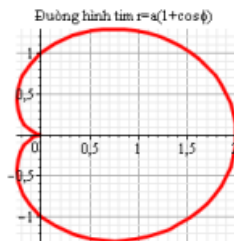
Cho cung  $AB$  quay quanh trục  $Oy$ , ta được đối cầu, theo (\*), ta được  $S_{\text{đối cầu}} = 2\pi x_C \cdot L$

Biết:  $S_{\text{đối cầu}} = 2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 2R \sin \alpha$ ;

$L = R \cdot 2\alpha$  thay vào (\*) ta được  $x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$

**Ví dụ 4** [6, tập 3, trang 203]: Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất giới hạn bởi đường  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $a \geq 0$ .

**Hình 4.** Đường  $r = a(1 + \cos \varphi)$



*Giải:* Bản phẳng  $D$  giới hạn bởi đường hình tim  $r = a(1 + \cos \varphi)$ , nhận trục  $Ox$  làm trục đối xứng (hình 4). Do đó  $y_G = 0$ .

$$\text{Tính } x_G, \text{ ta có: } \iint_D x dx dy = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos(\varphi))} r^2 dr$$

$$= 2 \int_0^\pi \frac{1}{3} a^3 (1 + \cos \varphi)^3 d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^\pi a^3 (1 + 3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) d\varphi$$

$$= 8a^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi}{2} = \frac{3\pi a^3}{2} \quad \text{Mặt khác}$$

$$\iint_D x dx dy = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos(\varphi))} r^2 \cos \varphi dr$$

$$= 2 \int_0^\pi \frac{1}{3} a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int_0^\pi 8 \cos^6 \frac{\varphi}{2} (2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1) d\varphi$$

Đổi biến số,  $t = \frac{\varphi}{2}$  ta được

$$\iint_D x dx dy = \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (16 \cos^8 t (1 - 8 \cos^6 t) dt$$

$$= \frac{4a^3}{3} (16 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 8 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi a^3}{4}$$

Vậy =

$$x_G = \frac{5\pi a^3}{4} \cdot \frac{2}{3\pi a^2} = \frac{5a}{6}$$

Cách 2: Dùng Maple, Chương trình tính.

>With(student):

```
S := 2*Doubleint(r, r = 0..a*(1 + cos(phi)), phi = 0..pi);
S := value(%);
C := 2*Doubleint(r^2*cos(phi), r = 0..a*(1 + cos(phi)), phi = 0..pi);
C := value(%); XG := C/S;
```

Kết quả chương trình tính:

$$S := 2 \left( \int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos(\varphi))} r dr d\varphi \right) ; S := \frac{3}{2} \pi a^2$$

$$C := 2 \left( \int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos(\varphi))} r^2 \cos(\varphi) dr d\varphi \right)$$

$$C := \frac{5}{4} \pi a^3 ; XG := \frac{5}{6} a$$

**Ví dụ 5** [5, tập 3, trang 113]: Tính khối lượng của bản phẳng choán miền  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 - R^2 \leq 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , biết khối lượng riêng  $(x, y) = xy$

*Giải:* Dùng công thức

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy \Rightarrow m = \iint_D xy dx dy$$

Chuyển sang tọa độ cực, miền  $D$  được xác định bởi  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ;  $0 \leq r \leq R$ , Vậy

$$m = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r^2 \cos \varphi \sin \varphi dr d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^R r^3 dr = -\frac{\cos 2\varphi}{4} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{8}$$

Cách 2: Dùng Maple. Chương trình tính, dùng công thức (8), (1), tích phân kép

>With(student):

```
changevar({x = r*cos(phi), y = r*sin(phi)},
Doubleint(r*cos(phi)*r*sin(phi), x, y), [r, phi]);
Doubleint(r^2*cos(phi)*r*sin(phi), r = 0..R, phi = 0..pi/2);
% = value(%);
```

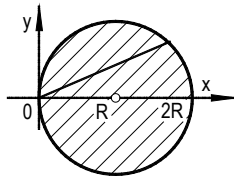
Kết quả chương trình tính:

$$\iint_D r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) |r| dr d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) dr d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) dr d\varphi = \frac{1}{8} R^4$$

**Ví dụ 6** [5, tập 3, trang 114]: Tính mômen quán tính đối với gốc tọa độ của miền tròn D xác định bởi miền tròn:



**Hình 5.** Miền D

$x^2 + y^2 - 2Rx \leq 0$ , biết khối lượng riêng

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

*Giải:* Ta có

Chuyển sang tọa độ cực, miền D' được xác định bởi

$$0 \leq r \leq R \cos \varphi \text{ vậy}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} r^4 dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \frac{R^5}{5} \cos^5 \varphi d\varphi \\ &= \frac{2R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{2R^5}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16R^5}{75} \end{aligned}$$

Cách 2:

Chương trình Maple, dùng công thức (8), (6), tích phân kép.

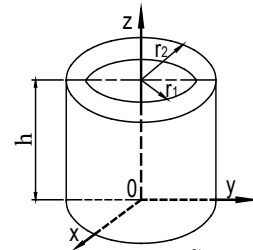
>With(student)

```
changevar({x = r*cos(phi), y = r*sin(phi)},
Doubleint((x^2 + y^2)*sqrt(x^2 + y^2), x, y), [r, phi]):
Doubleint(r^4, r = 0..R*cos(phi), phi = -pi/2..pi/2);
% = value(%);
Int(2/5 * R^5 * cos^5(phi), phi = 0..pi/2): % = value(%);
```

Kết quả chương trình tính,

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{R \cos \varphi} r^4 dr d\varphi \\ &\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{R \cos \varphi} r^4 dr d\varphi = \frac{1}{5} R^5 \cos^5 \varphi \pi \end{aligned}$$

**Ví dụ 7:** Tính mômen quán tính của vật thể hình trụ rỗng:  $z = h$ , bán kính hai đáy là  $r_1, r_2$  ( $r_1=5, r_2=6$ ) đối với gốc tọa độ biết:  $\rho(x, y, z) = \text{const}$



**Hình 6.** Trụ rỗng

*Giải:* Chuyển sang tọa độ trụ, công thức (9)

$$\{x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z\}$$

Tính mômen quán tính  $I_0$ , công thức (7)

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Cận tích phân ( $r=5..6, z=0..h, \varphi=0..2\pi$ )

Tích phân bội ba. Chương trình Maple:

>With(student):

```
changevar({x = r*cos(phi), y = r*sin(phi), z = z},
Tripleint((x^2 + y^2 + z^2), x, y, z), [r, z, phi]);
I0 := rho*Tripleint(|r|^2 + |r|^2, r = 5..6, z = 0..h, phi = 0..2*pi);
I0 := value(%);
```

Kết quả chương trình tính

$$\begin{aligned} &\iiint_V (|r|^2 + |r|^2) dr dz d\varphi \\ I_0 &:= \rho \left( \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_5^6 (|r|^2 + |r|^2) dr dz d\varphi \right) \\ I_0 &:= \rho \left( \frac{11}{3} h^3 \pi + \frac{671}{2} h \pi \right) \end{aligned}$$

Tổng quát: khi  $r_1, r_2 > 0; r_2 > r_1$  Công thức:

$$I_0 = \rho \left( \frac{r_2^2 - r_1^2}{3} h^3 \pi + \frac{r_2^4 - r_1^4}{2} h \pi \right)$$

### 3. Kết quả và thảo luận

- Dùng công thức Guyndanh, nhiều trường hợp cho kết quả nhanh, tính toán đơn giản, như các ví dụ [8, trang 200]; [2, trang 325].

- Khi tính tích phân bội ba trên tọa độ đề các, cách làm tương tự. Ví dụ [7, tập 3, trang 206]. V là miền xác định bởi:

$$x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x+y+z \leq 1.$$

Tính  $\iiint_V (1-x-y-z) dx dy dz$ .

*Giải:* Chương trình Maple (tọa độ đề các).

Cách 2: >With(student)

```
Tripleint(1 - x - y - z, z = 0..1 - x - y,
y = 0..1 - x, x = 0..1); % = value(%);
```

### **Tài liệu tham khảo**

- [1] Chu Tạo Đoan, *Cơ học lý thuyết, Tập 1*, NXB Giao thông Vận tải, 2000.
- [2] Jean - Mearie Monier, *Toán - Giải tích 4*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2006.
- [3] Nguyễn Ngọc Cừ, Lê Huy Đạm, Trịnh Danh Đăng, *Giải tích II*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006.
- [4] Phạm Huy Điển, *Dạy và học toán cùng máy tính*, NXB Giáo dục, 2007.
- [5] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, tập 2, 3*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2023.
- [6] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Bài tập toán cao cấp, tập 2, 3*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2014.
- [7] Phạm Huy Điển, *Tính toán, lập trình và giảng dạy toán học trên Maple*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2004.
- [8] Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Vượng, *Cơ học ứng dụng*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2000.