HÀM SẢN XUẤT TRONG MỐI QUAN HỆ VỚI ĐỊNH LÝ HÀM ẨN

GS.TS. Trần Trung*

Phó Hiệu trưởng, Trường Đại học Hòa Bình

* *Tác giả liên hệ: trantrung@daihochoabinh.edu.vn*

Ngày nhận: 26/7/2021

Ngày nhận bản sửa: 17/8/2021

Ngày duyệt đăng: 08/9/2021

Tóm tắt

*Toán học ứng dụng trong các hoạt động kinh tế luôn gắn với mô hình hàm sản xuất trong giải quyết các bài toán tối ưu có ràng buộc và phân tích so sánh để đánh giá hiệu quả. Bài viết này đề cập đến vai trò cốt yếu của **Định lý hàm ẩn IFT** trong kinh tế thông qua ba mô hình hàm sản xuất Cobb - Douglass, Spillman và dạng Quadratic được viện dẫn cùng các số liệu khảo sát cho ba mô hình đó của nhiều tác giả [4-7]. Việc chi tiết hóa cách chứng minh **Định lý hàm ẩn IFT** cũng là cố gắng giúp cho độc giả có thể dễ dàng hơn khi vận dụng định lý này cho các mô hình hàm sản xuất được quan tâm.*

Từ khóa: *Định lý hàm ẩn, hàm sản xuất, Cobb - Douglass, Spillman, Quadratic*

On the implicit function theorem and production functions

Abstract

Applied mathematics-Economics concentration is designed to reflect the nature of modern theory and empirical research. The implicit and inverse function theorems have blossomed into powerful tools to find solution for modern economics. In this work several examples of constrained optimizations that are related to three production functions, Cobb - Douglass, Spillman, and Quadratic form are presented where a key role of the implicit and inverse function theorems have been tested in different sectors and different level, from a firm to industry sectors [4 - 7]. The proof in detailed of the implicit function theorem is also described which may encourage readers to continue further study and more easily applying this theorem for the production function models interested in.

Keywords: *Implicit Theorem, hroduction Function, Cobb - Douglass, Spillman, Quadratic*

1. Đặt vấn đề

Trong mọi hoạt động kinh tế, việc thu được giá trị đầu ra vượt trội đều mang lại ý nghĩa cho các hoạt động này. Mặc nhiên sự tồn tại của các nguồn lực cần thiết để triển khai tốt cho quá trình sản xuất đều cần được xác định rõ trong mối tương quan của chúng.

Khi xem xét không gian sản xuất $\mathbf{R}^n$ đối với n nguồn lực cố định, chúng ta cần cố gắng biểu diễn mối quan hệ giữa các nguồn lực và giá trị đầu ra của sản xuất ở dạng hàm tường minh. Khi đó, việc áp dụng các thuật toán để giải sẽ trở nên dễ dàng hơn so với trường hợp mối quan hệ đó được biểu diễn ở dạng hàm ẩn. Vấn đề đặt ra là ở điều kiện nào thì mối quan hệ đó được biểu diễn dưới dạng hàm số, cho dù là một hàm ẩn. Và quan trọng hơn, việc ứng dụng các khai triển Taylor tại lân cận điểm giá trị tối ưu mong muốn (các chi phí nguồn lực là thấp nhất) thì phiên bản tuyến tính cho hàm sản xuất được xác định.

Trong thực tế sản xuất thì số ẩn số thường lớn hơn số phương trình. Khi đó, hàm sẽ không có hàm ngược, và lúc này, chúng ta phải biểu diễn một số ẩn số theo các ẩn số khác.

Ví dụ: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ biểu diễn z như là một hàm ẩn của (x, y) ở lân cận (0,0,1). Hàm ẩn này có thể tạo thành hàm tường minh $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Tuy nhiên, không phải trong điều kiện nào cũng có thể chuyển từ hàm ẩn sang dạng hàm tường minh như trên. Điều quan trọng trước hết là điều kiện tồn tại hàm ẩn cần phải được xác định, rồi trên cơ sở đó, xác định và đánh giá điều kiện tối ưu cho hàm sản xuất.

Một trong các cơ sở toán học để biểu diễn tuyến tính hóa các hàm sản xuất là **Định lý hàm ẩn** (IFT). Kết quả bàn luận cho thấy một vai trò cốt yếu về IFT trong kinh tế. Cụ thể trong các bài toán tối ưu và phân tích so sánh [1], các hàm sản xuất: Cobb - Douglass, Spillman và dạng Quadraric, cùng cơ sở toán học của nó cho điều kiện cho tối ưu hóa theo yêu cầu của sản xuất sẽ được dẫn ra như là những ví dụ minh họa cho việc đánh giá sản xuất của một công ty, tập đoàn sản xuất, thậm chí cho một ngành kinh tế.

2. Kết quả và bàn luận

Để đơn giản, trước hết, chúng ta khảo sát định lý hàm ẩn phiên bản ngắn, nghĩa là, phiên bản cho phép xác định điều kiện để chuyển từ hàm ẩn sang hệ thống các phương trình tuyến tính.

Định lý hàm ẩn, phiên bản ngắn [2,3].

Cho ánh xạ (hàm số) $\boldsymbol{F}: E \longrightarrow \mathbf{R}^{\boldsymbol{m}}$, với $E \subset \mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}$ là tập mở, thỏa mãn $\boldsymbol{F} \in C^1(E)$, nghĩa là, đạo hàm bậc 1 của $\boldsymbol{F}$ là khả vi. Giả thiết rằng $\boldsymbol{c} \in E$ thỏa mãn $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}_m$ và $\mathrm{Im}(\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c})) = \mathbf{R}^{\boldsymbol{m}}$. ***Thì hệ thống các phương trình tuyến tính*** $(\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}))(\mathrm{x}) = 0$ có m biến then chốt y và $m - n$ biến không then chốt z, và tồn tại một lân cận của $\boldsymbol{c}$ mà ở đó, $\boldsymbol{F}(\mathrm{x}) = \mathbf{0}$ ngầm xác định y như là hàm $\mathbf{g}$ của z. Hàm $\mathbf{g}$ là hàm ẩn.

Định lý hàm ẩn khẳng định rằng trong lân cận hàm ẩn có hành vi giống như đạo hàm của nó (nghĩa là, giống như quá trình tuyến tính hóa của hàm). Do $\boldsymbol{F}$ bắt nguồn từ tập con của $\mathbf{R}^{\boldsymbol{n}} \longrightarrow \mathbf{R}^{\boldsymbol{m}}$, đạo hàm của nó nằm trong $L(\mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}, \mathbf{R}^{\boldsymbol{m}})$.

Ở đây chúng ta sẽ chứng minh phiên bản cụ thể hơn của **Định lý hàm ẩn**.

Định lý hàm ẩn: Cho $\boldsymbol{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ là một ánh xạ C^1 của tập mở $E \subset \mathbf{R}^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{R}^{\boldsymbol{m}} \times \mathbf{R}^{\boldsymbol{n-m}}$ vào $\mathbf{R}^{\boldsymbol{m}}$ sao cho $\boldsymbol{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}_n$ đối với $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nào đó thuộc E. Đặt $A = \mathrm{J}\boldsymbol{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, với $A = [A_{\mathrm{y}}|A_{\mathrm{z}}]$. Nếu A_{y} là khả nghịch, thì tồn tại các tập mở $U \subset \mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}$, $W \subset \mathbf{R}^{\boldsymbol{n-m}}$ với $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$ và $\mathbf{b} \in W$ sao cho:

a. Đối với mỗi $\mathbf{z} \in W$, có một $\mathbf{y}$ duy nhất sao cho $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in U$ và $\boldsymbol{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$;
b. Nếu $\mathbf{z}$ này được xác định là $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ thì $\mathbf{g}$ là một ánh xạ C^1 của W vào $\mathbf{R}^{\boldsymbol{m}}$, $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$;

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{g}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{y} \in W) \quad (1)$$

Và

$$\mathrm{J}\mathbf{g}(\mathbf{b}) = -A_{\mathrm{y}}^{-1} A_{\mathrm{z}} \quad (2)$$

Hàm $\mathbf{g}$ được xác định ẩn bởi (1).

$A = \mathrm{J}\boldsymbol{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: Là Jacobian của $\boldsymbol{F}$ tại điểm $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, là ma trận có được bằng cách lấy đạo hàm riêng phần của các phần tử của ma trận $\boldsymbol{F}$ theo các biến.

Chứng minh:

Trước hết, ta áp dụng kỹ thuật lặp cho dạng hàm để tạo ra một hàm mới cùng đẳng cấu, và đồng tính chất đối với hàm $\boldsymbol{F}$.

Định nghĩa $\widehat{\boldsymbol{F}}$ bởi $\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\boldsymbol{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{z})$ với $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in E \subset \mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}$. Theo đó, $\widehat{\boldsymbol{F}}$ là một ánh xạ C^1, $\widehat{\boldsymbol{F}}: E \longrightarrow \mathbf{R}^{\boldsymbol{n}}$ (theo giả thiết của định lý này). Ánh xạ tuyến tính $\mathrm{D}\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ là khả nghịch do Jacobian ma trận của nó là khả nghịch. Khi đó, với giả thiết Jacobian $A = \mathrm{J}\boldsymbol{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [A_{\mathrm{y}}|A_{\mathrm{z}}]$, lấy đạo hàm riêng phần của các phần tử của $\widehat{\boldsymbol{F}}$ ta sẽ có: phần tử thứ nhất của $\widehat{\boldsymbol{F}}$ là $\boldsymbol{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ có đạo hàm riêng phần theo $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ lần lượt là $A_{\mathbf{y}}$ và $A_{\mathbf{z}}$; phần tử thứ hai $\mathbf{z}$ lần lượt có đạo hàm riêng phần theo $\mathbf{y}$ là ma trận zero cấp m x m, theo $\mathbf{z}$ là đơn vị $\mathbf{I}_{n-m}$. Và ta viết được:

$$\mathrm{J}\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} A_{\mathbf{y}} & A_{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} A_{\mathbf{y}} & A_{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{A_{\mathbf{y}}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & -A_{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} & A_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\mathbf{y}}{}^{-1} & -A_{\mathbf{y}}{}^{-1}A_{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}$$

Kết quả này cho thấy hàm $\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ mang tính song ánh (bijective), cũng nghĩa là 1-to-1, một điều kiện cần và đủ để có ánh xạ/hàm ngược.

Do đó, chúng ta có thể áp dụng **Định lý hàm ngược** đối với $\widehat{\boldsymbol{F}}$: tồn tại các tập mở U, V trong $\mathbf{R}^{n}$ với $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in U$, $\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\boldsymbol{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}),\mathbf{b}) = (\mathbf{0},\mathbf{b}) \in V$ sao cho $\widehat{\boldsymbol{F}}$ là ánh xạ 1-to-1 của U đến V ($\boldsymbol{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ là theo giả thiết của định lý này). Bây giờ hạn chế V ở các điểm $(\mathbf{0},\mathbf{z})$, và đặt:

$$W = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{n-m} : (\mathbf{0},\mathbf{z}) \in V\}$$

và ta có $\quad \mathbf{b} \in W$

Tập W này là mở do tập V mở (mỗi điểm $(\mathbf{0},\mathbf{z})$ là điểm bên trong V) và phép chiếu của một quả bóng mở là một quả bóng mở. Nếu $\mathbf{z} \in W$ thì $(\mathbf{0},\mathbf{z}) = (\boldsymbol{F}(\mathbf{y},\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{y},\mathbf{z})$ đối với các điểm $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ nào đó thuộc U ($\boldsymbol{F}(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ là theo định nghĩa của $\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{y},\mathbf{z})$. Để chứng minh rằng với mỗi $\mathbf{z} \in W$ có tương ứng một $\mathbf{y}$ duy nhất sao cho $(\mathbf{y},\mathbf{z} \in U$, ta giả thiết rằng cũng có $\mathbf{y}',\mathbf{z}) \in U$ sao cho $\boldsymbol{F}(\mathbf{y}',\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Theo đó thì:

$$\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{y}',\mathbf{z}) = (\boldsymbol{F}(\mathbf{y}',\mathbf{z}),\mathbf{z}) = (\mathbf{0},\mathbf{z})$$
$$= (\boldsymbol{F}(\mathbf{y},\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

Do $\widehat{\boldsymbol{F}}$ là ánh xạ 1-to-1 trong U, điều này ngụ ý rằng $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, vì vậy, $\mathbf{y}$ là duy nhất.

Đối với phần 2 của **Định lý**, chúng ta lại đặt $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ với $\mathbf{z} \in W$, sao cho $(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) \in U$ và $\boldsymbol{F}(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ (xuất phát từ giả thiết lựa chọn $\boldsymbol{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{0}_n$). Theo đó, $\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) = (\mathbf{0},\mathbf{z}) \in V$ đối với $\mathbf{z} \in W$. Như vậy, $\widehat{\boldsymbol{F}}$ là một ánh xạ từ U đến trên V. Nếu đặt $\widehat{\boldsymbol{G}}$ là một ánh xạ của V đến trên U, thì đây là ánh xạ ngược của $\widehat{\boldsymbol{F}}$. Và $\widehat{\boldsymbol{G}}$ cũng là một ánh xạ lớp C^1 bởi theo **Định lý hàm ngược,** ta có $(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \widehat{\boldsymbol{G}}(\mathbf{0},\mathbf{z})$ bởi vì $\widehat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) = (\mathbf{0},\mathbf{z})$. Do đó, $\mathbf{g}$ cũng là một ánh xạ lớp C^1.

Cuối cùng, để tính toán $\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{b})$, đưa $(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{z})$. Theo đó,

$$\mathrm{J}\Phi(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathrm{J}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad \text{với} \quad \mathbf{z} \in W$$

Do $\boldsymbol{F}(\Phi(\mathbf{z})) = \boldsymbol{F}(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ trong W, quy luật chuỗi đã cho thấy rằng:

$$\mathrm{J}\boldsymbol{F}\big(\Phi(\mathbf{z})\big).\mathrm{J}\Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}_{m\,\mathrm{x}\,(n-m)}$$
$$(\mathrm{J}\boldsymbol{F}\big(\Phi(\mathbf{z})\big) \subset \mathbf{R}^{m\,\mathrm{x}\,n}; \mathrm{J}\Phi(\mathbf{z})\mathrm{J} \subset \mathbf{R}^{n\,\mathrm{x}\,(n-m)})$$

Khi $\mathbf{z} = \mathbf{b}$ thì $\Phi(\mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})$ bởi vì $\Phi(\mathbf{z}) = (\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z})$,

và $\boldsymbol{F}(\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \mathbf{0}_n = \boldsymbol{F}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, và tiếp đến, $\mathrm{J}\boldsymbol{F}\big(\Phi(\mathbf{b})\big) = \mathrm{J}\boldsymbol{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = A$. Bởi vậy, $A.\mathrm{J}\Phi(\mathbf{b})$ bằng đúng ma trận zero cấp $\boldsymbol{m}$ x $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})$. Vậy

$$[A_{\mathbf{y}}|A_{\mathbf{z}}].\begin{bmatrix} \mathrm{J}\mathbf{g}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = A_{\mathbf{y}}.\mathrm{J}\mathbf{g}(\mathbf{z}) + A_{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

Kết quả này cho thấy:

$\mathrm{J}\mathbf{g}(\mathbf{z}) = -A_{\mathbf{y}}^{-1}.A_{\mathbf{z}}$. **(điều phải chứng minh)**

Kết quả chứng minh ở trên cho thấy $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ là khó để tìm ra, nhưng đạo hàm của nó lại là hàm tường minh.

Nhận xét: Định lý hàm ẩn nói rằng $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\mathbf{c})$ là khả nghịch, tập $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ cho phép quá trình thông số hóa (mang tính cục bộ trong lân cận) của 1 điểm $\Phi(\mathbf{z}) = (\mathbf{g}(\mathbf{z}),\mathbf{z})$ với các tham số $\mathbf{z}$. Chúng ta sẽ sử dụng thực tế này trong quá trình tối ưu hóa ràng buộc, điều sẽ được bàn luận trong phần tiếp sau.

Tối ưu hóa ràng buộc là một trong các ứng dụng quan trọng của định lý hàm ẩn trong kinh tế. Chúng ta sẽ xem xét một ví dụ như vậy, đó là một phân tích thống kê cạnh tranh như được minh họa sau đây.

Ví dụ 1: Hãy xem xét một công ty sản xuất hàng hóa $\mathbf{y}$ sử dụng n đầu vào $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}})$. Công ty bán sản phẩm đầu ra và thu mua đầu vào trên thị trường cạnh tranh: giá thị trường của $\mathbf{y}$ là p được chúng ta giả thiết là cố định trong suốt quá trình, và chi phí của mỗi đơn vị của $\mathbf{x}$ là $w = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Công nghệ của công ty là được cho bởi $f: \mathbf{R}_+^n \longrightarrow \mathbf{R}_+$ theo:

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1} x_i^{a_i} =: \mathbf{x}^{\mathbf{a}},$$

với mọi $0 < \forall a_i < 1$

Lợi nhuận của nó được tính ở dạng:

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = p.f(\mathbf{x}) - \mathbf{w}^T\mathbf{x}$$

Đây là một dạng hàm sản xuất Cobb - Douglass Production Function [4] cho đa biến đầu vào, được đề xuất bởi Cobb và Douglass đề xuất năm 1928, sau đó, được phát triển bởi nhiều nhà nghiên cứu, nhiều lớp hàm Cobb - Douglass Production Function đã được phát triển cho đến ngày nay.

Trong ví dụ này, công ty lựa chọn $\mathbf{x}$ để cực đại hóa lợi nhuận hay nói khác đi, để tối thiểu hóa chi phí. Câu hỏi của chúng ta là lựa chọn x_i của công ty chịu ảnh hưởng như thế nào bởi sự thay đổi trong ω_i. Chú ý rằng ω_1 ảnh hưởng đến sự lựa chọn x_1 không chỉ trong con đường trực tiếp, mà còn gián tiếp qua ảnh hưởng của nó đến các đầu vào khác của $\mathbf{x}$, như là: $x_2, \dots, x_n$ chẳng hạn.

Định nghĩa gradient của lợi nhuận π theo $\mathbf{x}$ như là:

$$\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n, \qquad \boldsymbol{F}(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = \nabla\pi(\mathbf{x}, \mathbf{w})$$

Đầu vào thứ i có gradient là:

$$\boldsymbol{F}_i(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = pa_i \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{x_i} - \omega_i = pa_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}-e_i} - \omega_i$$

Cho $\mathbf{w}^*$ là vector giá, điểm tối ưu $\mathbf{x}^*$ (giả sử nó có các đầu vào dương thực sự) thỏa mãn các điều kiện bậc nhất $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*; \mathbf{w}^*) = \mathbf{0}$.

Giả sử có một lời giải nằm trong lân cận $(\mathbf{x}^*; \mathbf{w}^*)$, các điều kiện bậc nhất của bài toán tối ưu này là:

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = pa_1 \frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*} - \omega_1 = 0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = pa_2 \frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*} - \omega_2 = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = pa_n \frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*} - \omega_2 = 0$$

Như chúng ta nghiên cứu tiếp theo, các điều kiện bậc hai được giữ cho ở đây là tính lõm thực sự của hàm sản phẩm (chi phí là cực tiểu).

Chúng ta hãy định nghĩa:

$$\boldsymbol{F}_1 = pa_1 \frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*} - \omega_1$$

$$\boldsymbol{F}_2 = pa_2 \frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*} - \omega_2$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{F}_n = pa_n \frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*} - \omega_n$$

Ma trận Jacobian của $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots, \boldsymbol{F}_n)^T$ theo $\mathbf{x}$, và tại $\mathbf{x}^*$ là (để thực hiện ta lấy đạo hàm lần lượt $\boldsymbol{F}_i$ với $i = 1 \div n$ theo tất cả các biến $\mathbf{x}_i$):

$$J_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*) = \begin{bmatrix} pa_1(a_1-1)\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_1^*} & pa_1a_2\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_2^*} & \cdots & pa_1a_n\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_n^*} \\ pa_2a_1\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_1^*} & pa_2(a_2-1)\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_2^*} & \cdots & pa_2a_n\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_n^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ pa_na_1\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_1^*} & pa_na_2\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_{21}^*} & \vdots & pa_n(a_n-1)\dfrac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_n^*} \end{bmatrix}$$

Nhắc lại rằng, $J_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*)$ đây là một ma trận vuông cấp n x n, với các phần tử trên đường chéo chính (ta bỏ qua tất cả các hệ số p) đều có thể viết lại được ở dạng:

p

$$a_i(a_i-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_i^*x_i^*} = p\left[\frac{a_ia_i}{x_i^*x_i^*} - \frac{a_i}{x_i^*x_i^*}\right]\mathbf{x}^{*\mathbf{a}} = p\left[\left[\frac{a_ia_i}{x_i^*x_i^*}\right] - \left[\frac{a_i}{x_i^*x_i^*}\right]\right]\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}$$

Các phần tử khác được viết lại như sau:

$$pa_ia_j\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_i^*x_j^*} = pa_ia_j\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_i^*x_j^*}\bigg|_{i,j=1\div n;i\neq j} - 0$$

Khi này, Jacobian được viết lại như sau:

$$J_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*) = p.\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}\begin{bmatrix} \dfrac{a_1a_1}{x_1^*x_1^*} - \dfrac{a_1}{x_1^*x_1^*} & \dfrac{a_1a_2}{x_1^*x_2^*} - 0 & \cdots & \dfrac{a_1a_n}{x_1^*x_n^*} - 0 \\ \dfrac{a_2a_1}{x_2^*x_1^*} - 0 & \dfrac{a_2a_2}{x_2^*x_2^*} - \dfrac{a_2}{x_2^*x_2^*} & \cdots & \dfrac{a_2a_n}{x_2^*x_n^*} - 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{a_na_1}{x_n^*x_1^*} - 0 & \dfrac{a_na_2}{x_n^*x_2^*} - 0 & \vdots & \dfrac{a_na_n}{x_n^*x_n^*} - \dfrac{a_n}{x_n^*x_n^*} \end{bmatrix}$$

$$= p.\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}\left[\begin{bmatrix} \dfrac{a_1a_1}{x_1^*x_1^*} & \dfrac{a_1a_2}{x_1^*x_2^*} & \cdots & \dfrac{a_1a_n}{x_1^*x_n^*} \\ \dfrac{a_2a_1}{x_2^*x_1^*} & \dfrac{a_2a_2}{x_2^*x_2^*} & \cdots & \dfrac{a_2a_n}{x_2^*x_n^*} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{a_na_1}{x_n^*x_1^*} & \dfrac{a_na_2}{x_n^*x_2^*} & \cdots & \dfrac{a_na_n}{x_n^*x_n^*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{a_1}{x_1^*x_1^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_2}{x_2^*x_2^*} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{a_n}{x_n^*x_n^*} \end{bmatrix}\right]$$

Viết lại ở dạng rút gọn ta có:

$$J_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*) = p\left(\left[\frac{a_ia_j}{x_i^*x_j^*}\right]_{i,j=1,\dots,n} - \operatorname{diag}\left(\frac{a_i}{x_i^{*2}}\right)\right).\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}$$

Trong đó, $\left[\frac{a_ia_j}{x_i^*x_j^*}\right]_{i,j=1,\dots,n}$ là ma trận vuông cấp n, $\operatorname{diag}\left(\frac{a_i}{x_i^{*2}}\right)$ là ma trận đường chéo cấp n.

Chúng ta cũng nhận thấy rằng $J_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*) = pD_{\mathbf{x}}^2f(\mathbf{x}^*)$, nghĩa là Jacobian của $\boldsymbol{F}$ theo $\mathbf{x}$ bằng giá thị trường p của sản phẩm $\mathbf{y}$ nhân với Hessian (ma trận đạo hàm bậc 2) của hàm sản xuất. Một cấu trúc tương tự sẽ xuất hiện trong nhiều mô hình khác của kinh tế vi mô.

Tiếp theo từ các định nghĩa về $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n)^T$ ở trên, ma trận Jacobian theo $\mathbf{w}$:

$$\mathrm{J}_{\mathbf{w}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*) = -\mathbf{I}_n$$

Để đạt được mục đính của chúng ta là xác định lựa chọn đầu vào x_i của công ty sẽ bị ảnh hưởng như thế nào bởi sự thay đổi trong giá một đơn vị tương ứng của nó ω_{i}, ta lấy vi phân hệ phương trình tuyến tính $\boldsymbol{F}_i = 0$ ở trên theo các biến ω_{i}. Trước hết, ta đánh giá ảnh hưởng của ω_1 đến các đầu vào tại $\mathbf{x}^*$, ta lấy vi phân hệ $\boldsymbol{F}_i = 0$ theo ω_1 ta có:

$$pa_1(a_1-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial\omega_1} + pa_1a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial\omega_1} + \cdots + pa_1a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_n^*}\frac{\partial x_n^*}{\partial\omega_1} - 1 = 0$$

$$pa_2a_1\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial\omega_1} + pa_2a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial\omega_1} + \cdots + pa_2a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_n^*}\frac{\partial x_n^*}{\partial\omega_1} - 0 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$pa_na_1\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial\omega_1} + pa_na_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial\omega_1} + \cdots + pa_n(a_n-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_n^*}\frac{\partial x_n^*}{\partial\omega_1} - 0 = 0$$

Cấu trúc lại hệ phương trình trên chúng ta có:

$$\begin{bmatrix} pa_1(a_1-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_1^*} & pa_1a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_2^*} & \ldots & pa_1a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_n^*} \\ pa_2a_1\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_1^*} & pa_2a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_2^*} & \ldots & pa_2a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_n^*} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ pa_na_1\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_1^*} & pa_na_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_2^*} & \ldots & pa_n(a_n-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_n^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial\omega_1} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial\omega_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial\omega_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Ảnh hưởng của ω_i đến các đầu vào tại $\mathbf{x}^*$ được lặp lại như trên)

Tiếp theo sử dụng **Định lý hàm ẩn** và luật **Crammer**, chúng ta có:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial\omega_1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & pa_1a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_2^*} & \ldots & pa_1a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_n^*} \\ 0 & pa_2a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_2^*} & \ldots & pa_2a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_n^*} \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & pa_na_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_2^*} & \ldots & pa_n(a_n-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_n^*} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} pa_1(a_1-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_1^*} & pa_1a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_2^*} & \ldots & pa_1a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_1^*x_n^*} \\ pa_2a_1\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_1^*} & pa_2a_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_2^*} & \ldots & pa_2a_n\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_2^*x_n^*} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ pa_na_1\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_1^*} & pa_na_2\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_2^*} & \ldots & pa_n(a_n-1)\frac{\mathbf{x}^{*\mathbf{a}}}{x_n^*x_n^*} \end{bmatrix}} < 0$$

Để đánh giá ảnh hưởng của chi phí mỗi đơn vị đầu vào ω_i, ta lại lấy vi phân hệ $\boldsymbol{F}_i = 0$ theo ω_i để thu nhận được cột thứ i của ma trận $\mathbf{I}_n$ trong phương trình $\mathrm{J}_{\mathbf{w}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*) = -\mathbf{I}_n$.

Như vậy, mục đích của chúng ta trước hết để chứng minh rằng lân cận quanh $\mathbf{x}^*$, vector $\mathbf{x}$ có thể biểu diễn như là một hàm của $\mathbf{w}$.

Bây giờ, áp dụng **Định lý hàm ẩn** trong lân cận quanh $(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)$ vector $\mathbf{x}$ là một hàm của $\mathbf{w}$. Đạo hàm của hàm ẩn $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{w})$ là:

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^*) = -\left(\mathrm{J}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*; \mathbf{w}^*)\right)^{-1}\mathrm{J}_{\mathbf{w}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*; \mathbf{w}^*)$$
$$= \left(\mathrm{J}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*; \mathbf{w}^*)\right)^{-1}$$

Vì vậy, đối với ví dụ, để có sự phụ thuộc địa phương của x_i đối với ω_i, chúng ta một lần nữa sử dụng thực tế là $\mathrm{J}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*; \mathbf{w}^*)$ là xác định âm để xác định rằng sự phụ thuộc này âm (đơn giá ω_i tăng dẫn đến giảm lượng đầu vào x_i).

Để có một minh họa cụ thể hơn, chúng ta hãy xem xét công trình của Bozenar Gadjzick và Remigiusz Gawlik [5] đánh giá hiệu quả tái cấu trúc ngành luyện kim Ba Lan giai đoạn 2000-2015. Hai ông lựa chọn mô hình hàm nguồn lực Cobb - Duglass ở dạng:

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \pi(L, C) = bL^{\alpha}C^{\beta}$$

Ở đây: L là lực lượng lao động (*labor*), C là tư bản (*capital*); b là thông số cấu trúc; π là đầu ra của sản xuất được tạo bởi đầu vào L và C.

Các mô hình hàm sản xuất này bắt nguồn từ các thông số của chúng được đánh giá dựa trên dữ liệu thống kê. Với các yếu tố khác nhau miêu tả giá trị gia tăng hoặc sản phẩm đã bán, các đặc điểm của các mô hình được phân tích đã thay đổi một cách đáng kể.

Ví dụ, hiệu quả của hàm sản xuất thay đổi theo sự phụ thuộc các yếu tố thông qua giá trị gia tăng được tìm ra như sau:

$$\pi(L, C) = 14308.22 \text{ x } L^{-0.6523}C^{0.7799}$$

π: giá trị gia tăng; C: giá trị các tài sản dài hạn; L: số người làm việc;

Trong mô hình này, độ co dãn của sản xuất đối chiếu theo giá trị các tài sản dài hạn là dương, $E_{\pi/C} = 0.7799$, nhưng độ co dãn của sản xuất đối với số lượng người làm việc là âm, $E_{\pi/L} = -0.6523$. Kết quả là quy mô kinh tế của sản xuất được hiểu là tổng các độ co dãn của hàm nguồn lực là $E_{\pi/C} + E_{\pi/L} = 0.1276 < 1$. Điều này có nghĩa là giá trị đầu vào đã tăng nhanh hơn giá trị sản phẩm đầu ra (giảm hiệu quả sản xuất).

Ở mô hình thứ hai, các nhà nghiên cứu xác định mối quan hệ giữa giá trị gia tăng $\pi(L, C)$ theo giá trị các tài sản dài hạn C và thời gian làm việc L. Khi đó:

$$\pi(L, C) = 1180.25 \text{ x } L^{-0.4830}C^{0.8435}$$

Trong mô hình này, độ co dãn của sản xuất đối chiếu theo giá trị các tài sản dài hạn là dương, $E_{\pi/C} = 0.8435$, nhưng độ co dãn của sản xuất đối với thời gian làm việc là âm, $E_{\pi/L} = -0.4830$. Kết quả là quy mô kinh tế của sản xuất có tổng các độ co dãn của hàm nguồn lực là $E_{\pi/C} + E_{\pi/L} = 0.3065 < 1$. Điều này có nghĩa là giá trị đầu vào đã tăng nhanh hơn giá trị sản phẩm đầu ra (giảm hiệu quả sản xuất).

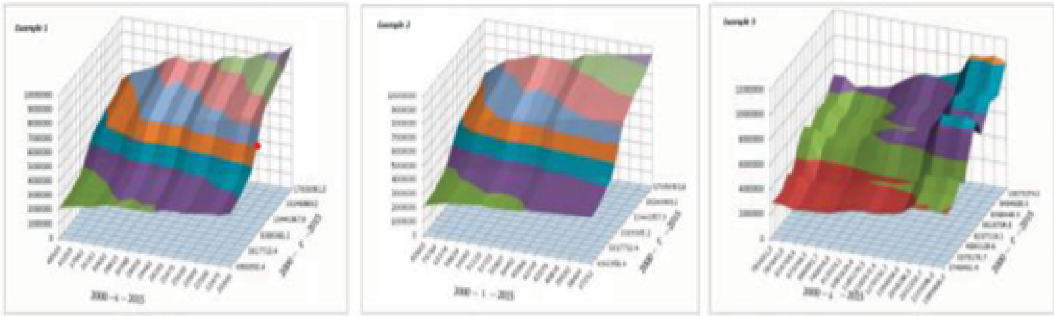
Tuy nhiên, ở mô hình thứ 3, tình hình có khác hẳn, khi hàm nguồn lực biểu thị giá trị gia tăng trong mối quan hệ với tài sản dài hạn trừ chi phí khấu hao, có liên quan đến khả năng sản xuất của các tài sản dài hạn này C và các chi phí nhân công L; theo đó:

$$\pi(L, C) = 0.1715 \text{ x } L^{0.4284}C^{0.7150}$$

Trong mô hình này, độ co dãn của sản xuất đối chiếu đến giá trị của tài sản dài hạn trừ đi chi phí khấu hao, có liên quan đến khả năng sản xuất của tài sản này là dương $E_{\pi/C} = 0.7150$; tính co dãn đối với chi phí nhân công cũng là dương, $E_{\pi/L} = 0.4284$. Tổng độ co dãn của sản xuất $E_{\pi/C} + E_{\pi/L} = 1.1434 > 1$ cho thấy giá trị đầu ra của sản xuất tăng nhanh hơn mức tăng của giá trị đầu vào, hiệu quả sản xuất tăng.

Với mô hình động giá trị gia tăng được tính đến ảnh hưởng của cải tiến kỹ thuật và tổ chức sản xuất, dù ảnh hưởng của nó, $e^{\gamma t}$ không vượt quá 6.4%.

$$\pi(L, C) = 996482.75 \text{ x } L^{-0.2656}C^{0.5458}e^{0.0638t}$$



Hình 1. Đồ thị minh họa các mô hình hàm sản xuất Cobb - Douglass đối với ngành công nghiệp thép Ba Lan trong thời kỳ tái cấu trúc 2000-2015 [5]

Nhận xét:

(1) Phương trình của mặt phẳng tiếp tuyến đối với bề mặt biểu diễn sản xuất tại $L = 1$ và $C = 1$:

$$P_{tag} = \pi(1,1) + \frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1)(L-1) + \frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1)(C-1)$$

(2) Đối với mỗi thay đổi nhỏ dọc theo mặt biểu diễn sản xuất, bắt đầu tại $(L, C) = (1,1)$, cần bao nhiêu đơn nhân công để thay thế một đơn vị vốn (nghĩa là tỷ lệ thay thế cận biên $MRS_{L\rightarrow C}$)?

Trước hết, ta biểu diễn sự thay đổi nhỏ của mặt biểu diễn sản xuất bắt đầu tại $(L, C) = (1,1)$:

$$\pi(1+\sigma, 1+\varepsilon) = \pi(1,1) + \sigma\frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1) + \varepsilon\frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1)$$

$$\delta\pi = \pi(1+\sigma, 1+\varepsilon) - \pi(1,1) = \sigma\frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1) + \varepsilon\frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1) = (\sigma, \varepsilon).\left(\frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1), \frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1)\right)$$

Phương trình của mặt phẳng tiếp tuyến với mặt biểu diễn sản xuất tại $(L, C) = (1,1)$ được xác định là:

$$(\sigma, \varepsilon).\left(\frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1), \frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1)\right) = 0$$

Điều này chỉ ra rằng

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1)}{\frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1)} = -\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

(3) Nếu có thể tăng C và L lên một chút theo bất kỳ tỷ lệ nào sao cho định chuẩn $\|C, L\| = c$, với c là một số dương rất nhỏ, thay đổi nào trong C và L sẽ dẫn đến mức tăng giá trị đầu ra lớn nhất?

Như trong nhận xét 1, ta đã có phương trình biểu diễn mặt phẳng tuyến tính tại (1,1) của mặt biểu diễn sản xuất là:

$$\begin{aligned}\pi(1+\sigma, 1+\varepsilon) &= \pi(1,1) + \frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1)(L-1) + \frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1)(C-1)\\ &= \pi(1,1) + \sigma\frac{\partial \pi}{\partial L}(1,1) + \varepsilon\frac{\partial \pi}{\partial C}(1,1)\\ &= \pi(1,1) + \left(\frac{\partial \pi}{\partial L}, \frac{\partial \pi}{\partial C}\right).(\sigma, \varepsilon)\end{aligned}$$

Vì vậy, để cực đại hóa giá trị của $\pi(L, C)$ trong lân cận của điểm (1,1) thì tích vô hướng trong biểu thức trên phải đạt cực đại. Điều này sẽ xảy ra khi:

$$(\delta C, \delta L) = (\sigma, \varepsilon) = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{\partial \pi}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial C}\right)^2}}\left(\frac{\partial \pi}{\partial C}, \frac{\partial \pi}{\partial L}\right)$$

Trường hợp hệ số cấu trúc $b = 1$ ta có biểu thức đơn giản hơn cho điều kiện cực đại của tích vô hướng đã nêu:

$$(\delta C, \delta L) = (\sigma, \varepsilon) = \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\beta, \alpha)$$

Ví dụ 2: Trong ví dụ này, chúng ta khảo sát hàm sản xuất Spillman với nhiều đầu vào, được đề xuất ở dạng:

$$\mathbf{y} = m - a\prod_i (v_i)^{x_i}$$

Ở đây, $\mathbf{y}$ là lượng sản phẩm đầu ra; $m > 0$ là thông số thể hiện lượng sản phẩm cực đại có thể đạt được; $a > 0$ là thông số biểu diễn ảnh hưởng đến sản lượng đầu ra của thông số biểu diễn lượng đầu vào $x_i > 0$; $0 < v_i < 1$ là thông số cấu trúc biểu diễn tỷ lệ giữa các đơn vị đầu vào trên tổng đầu ra; và $m - a \geq 0$ [6].

Như vậy, theo mô hình này, sản lượng cực đại là không thể đạt được ($\mathbf{y} < m$) và mức độ giảm tổng sản phẩm đầu ra là cần được khống chế. Khi đó, nhờ phép biến đổi $\mathbf{z} = m - \mathbf{y} = a\prod_i (v_i)^{x_i}$, chúng ta trở lại hàm sản xuất Cobb - Douglass.

Hàm sản xuất Spillman cho số đầu vào là 2 còn có thể viết ra ở dạng:

$$\mathbf{y} = m(1 - a_1.(\alpha_1)^{x_1})(1 - a_2.(\alpha_2)^{x_2})$$

Và Mary Ellen Embleton, trong luận văn thạc sĩ của mình tại Montana State University, Sept. 1987 [7], đã dựa trên số liệu thống kê thực tế giữa sản lượng cây trồng và chất dinh dưỡng đầu vào, đã xác định được hàm Spillman thực nghiệm $\mathbf{y}_{lm}$ trong nghiên cứu của mình:

$$\mathbf{y}_{lm} = 127.1628(1 - 0.775(0.981)^{N_i})(1 - 0.857(0.973)^{P_i})$$

N_i và P_i lần lượt là lượng đạm và phosphor bổ sung vào trong đất. Điều kiện tối ưu của hàm thực nghiệm $\mathbf{y}_{lm}$ được xác định theo điều kiện ràng buộc, ví dụ giá sản phẩm bán trên thị trường…

Ví dụ 3: Một trong các dạng phổ biến nhất của hàm sản xuất đó là dạng hàm đa thức bậc hai (quadratic forms). Dạng bậc hai với hai biến đầu vào sẽ được biểu diễn như sau:

$$\mathbf{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 - a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2$$

Một dạng biến thể khác của hàm quadratic là dạng căn bậc hai:

$$\mathbf{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 - b_{11}x_1^{0.5} - b_{22}x_2^{0.5} + b_{12}x_1^{0.5}x_2^{0.5}$$

Trong ví dụ này, chúng ta cũng đưa ra một số khái niệm thể hiện mối quan hệ giữa đạo hàm của hàm sản xuất với các thông số đầu vào, đầu ra của quá trình sản xuất. Thực tế sản xuất tỷ lệ sử dụng một đầu vào nào đó có thể bị thay đổi, người ta đưa ra khái niệm "Tỷ lệ thay thế cận biên (Marginal Rate of Substitute; MRS)" được định nghĩa như là "Một lượng chất đầu vào mà có thể được thay thế bởi một đơn vị của chất đầu vào khác trong khi đầu ra không đổi".

Tỷ lệ thay thế cận biên (MRS) có thể được đánh giá là tỷ lệ của các sản phẩm vật chất cận biên (Marginal Physical Products; MPP). MPP là đạo hàm riêng phần của hàm sản xuất.

Đối với hàm quadratic:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{a_2 - 2a_{22}x_2 + a_{12}x_1}{a_1 - 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2} = \frac{\mathrm{MPP}_{x_2}}{\mathrm{MPP}_{x_1}} = \frac{(\partial\mathbf{y}/\partial x_2)}{(\partial\mathbf{y}/\partial x_1)}$$

Dựa trên tính chất "Thay thế cận biên trong điều kiện đầu ra không đổi", để xác định mối quan hệ giữa x_1 và x_2, ta thiết lập cân bằng giữa MPP_{x_1} và MPP_{x_2}với các sản phẩm cận biên là zero và việc các giải phương trình này dẫn đến các mức đầu vào, x_1 và x_2, mà ở đó, đầu ra có thể đạt cực đại. Để đảm bảo chắc chắn rằng các đầu vào tạo ra cực đại ở đầu ra tiêu chuẩn được sử dụng là:

$$\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial x_1^2} \mathrm{x} \frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial x_1\partial x_1} > 0$$

Với điều kiện một trong hai đạo hàm cấp hai $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ hoặc $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} < 0$

Để sản lượng đầu ra đạt cực đại các mức đầu vào cần được thay thế một cách thích hợp trong phương trình gốc của nó.

Chú ý nếu hàm đầu ra là tổng chi phí, khi đó, ta xét điều kiện cho cực tiểu:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x_1^2} x \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x_1 \partial x_1} < 0$$

Với điều kiện một trong hai đạo hàm cấp 2 ở trên $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ hoặc $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} > 0$.

Trường hợp $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} x \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1} = 0$, ta sử dụng định nghĩa: "Điểm $M^*(x_i^*: i = 1,2, \dots, n)$ được gọi là điểm cực trị của hàm $\mathbf{y} = f(x_i: i = 1,2, \dots, n)$ nếu với mọi điểm $M(x_i^* + \delta x_i: i = 1,2, \dots, n)$ trong lân cận của M^*, ta luôn có $\Delta \mathbf{y} = f(x_i^*: i = 1,2, \dots, n) - f(x_i^* + \delta x_i: i = 1,2, \dots, n)$ không đổi dấu".

Các đường biên gờ đầu vào (Ridge Lines): Các đường Ridge sẽ chia bề mặt của hàm sản xuất giữa phần bổ sung và phần thay thế. Tại mỗi điểm trên đường biên gờ đầu vào, sản phẩm cận biên là zero. Do đó, các đường Ridge có thể được dẫn xuất từ việc cân bằng hai phương trình với sản phẩm cận biên bằng zero

$$\mathrm{MPP}_{x_2} = a_2 - 2a_2 x_2 + a_{12} x_1 = 0$$

và

$$\mathrm{MPP}_{x_1} = a_1 - 2a_1 x_1 + a_{12} x_2 = 0$$

Và giải chúng theo các tọa độ bằng cách thay thế giá trị áp đặt (hợp lý) cho một trong hai biến x_1 hoặc x_2 rồi xác định giá trị tương ứng của biến còn lại.

Các đường đẳng lượng (Isoquants): Tỷ lệ thay thế cận biên xác định độ dốc của đường đẳng lượng có thể thay thế lẫn nhau trong quá trình sản xuất trong khi đầu ra không thay đổi. Độ dốc của mỗi đường đẳng lượng cho biết tỷ lệ mà một biến đầu vào sẽ thay thế cho một đầu vào khác. Bất kỳ mức sản lượng nào trên mặt biểu diễn quá trình sản xuất đều đạt được nhờ sự kết hợp cụ thể của các yếu tố đầu vào. Đối với mức đã cho của đầu ra, một số tổ hợp của các đầu vào có thể được sử dụng. Phương trình mô tả các tổ hợp thay thế của các yếu tố đầu vào để đạt được một năng suất không đổi được gọi là phương trình đẳng phí (isocost, có thể chi phí cho đầu ra không đổi). Các đường đẳng lượng mô tả sự kết hợp các nguồn lực đầu vào để tạo ra một lượng cụ thể sản phẩm đầu ra, có thể được dẫn ra từ phương trình hàm sản xuất hoặc phương trình hồi quy, nhờ cách biểu diễn đại số một nguồn lực đầu vào như là hàm của các đầu vào khác.

Trong quá trình sản xuất với hai biến đầu vào ở trên, hàm ẩn $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_1, x_2)$, tại các đường đẳng lượng($\mathbf{y} = constant = \mathbf{k}$), ta có thể có dạng hàm tường minh $x_2 = \mathbf{g}(\mathbf{y} = \mathbf{k}, x_1)$. Lời giải ở đây là x_2 là hàm của x_1 tại một mức sản lượng đã cho. Và ta có phương trình hồi quy sau:

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 - a_{11} x_1^2 - a_{22} x_2^2 + a_{12} x_1 x_2 - \mathbf{y} = 0$$

Viết lại dưới dạng đa thức bậc hai của x_2 như sau:

$$(-a_{22}) x_2^2 + (a_2 + a_{12} x_1)\, x_2 + (a_0 + a_1 x_1 - a_{11} x_1^2 - \mathbf{y}) = 0$$

Giải phương trình bậc hai này ta sẽ có được giá trị của x_2 theo x_1 với giá trị $\mathbf{y}$ đã cho.

$$x_2 = \frac{(a_2 + a_{12} x_1) \pm \sqrt{(a_2 + a_{12} x_1)^2 + 4a_{22}(a_0 + a_1 x_1 - a_{11} x_1^2 - \mathbf{k})}}{2a_{22}}$$

Đường đồng mức (Isocline) là một đường nối tất cả các điểm có cùng độ dốc hay có cùng MRS trên một họ các đồng đẳng. Nói cách khác, nó kết nối tất cả các tổ hợp đầu vào có cùng mức MRS đối với các mức sản lượng khác nhau. Đối với mỗi MRS của nguồn lực đầu vào có thể sẽ có một đường đồng mức. Ở trên chúng ta đã thấy có thể đạt được sản lượng khác nhau với nhiều tổ hợp của các đầu vào. Nếu giá của các đầu vào đã biết, tổ hợp có chi phí thấp nhất ở mức sản lượng đã cho sẽ được xác định. Tổ hợp có chi phí thấp nhất (cho sản lượng cao nhất) được tạo ra nhờ cân bằng tỷ số giá các đầu vào đối với nghịch đảo MRS. Lúc này $x_2 = \mathbf{g}(x_1, p_{x_1}, p_{x_2})$ một hàm của giá đơn vị các đầu vào p_{x_1}, p_{x_2} và x_1.

$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = \frac{\mathrm{MPP}_{x_1}}{\mathrm{MPP}_{x_2}} = \frac{p_{x_1}}{p_{x_1}} = k = \mathrm{MRS}_{x_1}$ đối với x_2

Tỷ số sản phẩm cận biên nêu trên biểu thị có bao nhiêu phần x_2 được bớt đi để tăng x_1 lên một đơn vị đầu vào mà vẫn duy trì sản xuất ở mức đã cho. Cụ thể với k là tỷ số giá đầu vào ta có:

$$x_2 = \frac{2ka_{11} + a_{12}}{ka_{12} + 2a_{22}} x_1 + \frac{a_2 - ka_1}{ka_{12} + 2a_{22}}$$

Cực đại hóa lợi nhuận:

Đối với mỗi tỷ số giá của các yếu tố đầu vào đã cho, mức độ cực đại hóa lợi nhuận của việc sử dụng đầu vào có thể được xác định. Việc cực đại hóa lợi nhuận đạt được bằng cách đặt giá trị của sản phẩm cận biên bằng giá của đầu vào. Đối với hàm bậc hai, chúng ta có:

$$p_y(\mathrm{MPP}_{x_1}) = p_y(a_1 - 2a_1x_1 + a_{12}x_2) = p_{x_1}$$

Và

$$p_y(\mathrm{MPP}_{x_2}) = p_y(a_2 - 2a_2x_2 + a_{12}x_1) = p_{x_2}$$

Giải hệ hai phương trình này ta có:

$$x_1 = \frac{(a_{22}p_{x_1} + a_{12}p_{x_2})p_y^{-1} - (2a_1a_{22} + a_2a_{12})}{(a_{12})^2 - 4a_{11}a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{(a_{11}p_{x_2} + a_{12}p_{x_1})p_y^{-1} - (2a_{11}a_2 + a_1a_{12})}{(a_{12})^2 - 4a_{11}a_{22}}$$

Ở đây, mức sử dụng các đầu vào đối với quá trình cực đại hóa lợi nhuận là hàm của các hằng số của phương trình và giá của các đầu vào và đầu ra. Các phương trình này cung cấp hàm nhu cầu đầu vào, ở đó, người ta có thể theo dõi sự thay đổi đầu vào khi thay đổi giá.

Ví dụ: Một câu lạc bộ thể thao lập kế hoạch thuê một máy bay. Chi phí cho 60 hành khách là 9 triệu VND/người. Với mỗi hành khách tăng thêm, từ hành khách thứ 61 trở đi, thì tất cả hành khách đều được giảm 0.1 triệu/người. Máy bay có thể cất cánh với nhiều nhất là 90 hành khách.

1. Nếu có $(60 + \mathrm{x})$ hành khách bay, tổng chi phí TC(x) sẽ là bao nhiêu?

$$TC(\mathrm{x}) = (60 + \mathrm{x})(9 - 0.1\mathrm{x})$$

2. Xác định số hành khách cực đại mà tổng giá vé cực đại được trả bởi các thành viên câu lạc bộ.

Trước hết, ta lấy đạo hàm bậc nhất $TC'^{(\mathrm{x})} = 3 - 0.2\mathrm{x}$. Như vậy, điểm cực trị sẽ tại x = 15. Cũng dễ thấy rằng đạo hàm bậc hai: $TC''^{(\mathrm{x})} = -0.2 < 0$. Kết quả là số hành khách đảm bảo cho tổng giá vé cực đại được trả bởi các thành viên câu lạc bộ là: $60 + 15 = 75$ hành khách. Tổng thu cực đại là 562.5 triệu VND.

Tổng quát hơn, ta xét bài toán đơn giản, và cũng hay gặp trong thực tế: $C(P)$ là hàm chi phí tổng của một công ty để sản xuất P đơn vị hàng hóa nào đó. $A(P) = C(P)/P$ là hàm giá trung bình. Nếu $C(P)$ là khả vi thì $A(P)$ có một điểm dừng (điểm tới hạn) tại $P_0 > 0$ khi và chỉ khi chi phí cận biên và chi phí trung bình là bằng nhau tại P_0, $C'(P_0) = A(P_0)$.

Cụ thể hơn: $C(P) = aP^3 + bP^2 + cP + d$, với $a > 0, b \geq 0, c > 0$ và $d > 0$. Hãy chứng minh rằng $A(P)$ có điểm cực tiểu trong đoạn $(0, \infty)$. Xét trường hợp $b = 0$?

Rõ ràng trong trường hợp này, hàm chi phí trung bình được cho bởi:

$$A(P) = \frac{C(P)}{P} = aP^2 + bP + c + \frac{d}{P}$$

Lấy vi phân theo P và cho vi phân đó bằng zero ta có:

$$A'(P) = 2aP + b - \frac{d}{P^2}$$

Kết quả trên cho thấy $A'(P) < 0$ khi $P \to 0$ và $A'(P) > 0$ khi $P \to \infty$. Như vậy, đạo hàm bậc nhất có đổi dấu từ khi P thay đổi trong khoảng $(0, \infty)$. Nghĩa là, tồn tại một điểm tới hạn, tại đó, hàm giá trung bình đạt cực trị. Xét đạo hàm bậc hai:

$$A''(P) = 2a + 2\frac{d}{P^3} > 0$$

Như vậy, $A(P)$ có cực tiểu tại điểm P^* trong khoảng $(0, \infty)$, điểm mà tại đó, $A'(P) = 0$. Giá trị của P^* được xác định từ phương trình:

$$2a(P^*)^3 + b(P^*)^2 - d = 0$$

Trường hợp $b = 0$ thì $P^* = \sqrt[3]{d/2a}$;

Nhận xét: Trong bất kỳ một quá trình sản xuất hàng hóa nào, cũng luôn tồn tại một giá trị sản lượng mà tại đó, chi phí cho một đơn vị sản phẩm hàng hóa là ít nhất (các yếu tố khác được cố định).

3. Kết luận

Mục đích của bài viết này hướng tới vai trò của **Định lý hàm ẩn IFT** trong các bài toán tối ưu và phân tích so sánh trong kinh tế. Có ba dạng hàm sản xuất: **Cobb - Douglass, Spillman**, và dạng **Quadratic** được khảo sát khả năng áp dụng trong thực tế của chúng.

Các kết quả thử nghiệm của nhiều tác giả đã được tham khảo và viện dẫn để thấy được mô hình hàm sản xuất đã đáp ứng được bài toán tối ưu và phân tích so sánh trong một số lĩnh vực kinh tế ở quy mô một doanh nghiệp nhỏ cho đến một ngành sản xuất của một quốc gia. Trong bài viết này, chúng tôi cũng đã nhắc lại kỹ thuật xây dựng hàm lặp để tạo ra một hàm mới cùng đẳng cấu, và đồng tính chất đối với hàm gốc ban đầu, và chi tiết hóa phần chứng minh cho **Định lý hàm ẩn IFT** nhằm giúp độc giả có thể tiếp tục đi sâu nghiên cứu giải quyết các vấn đề bài toán tối ưu có ràng buộc và phân tích so sánh khi đánh giá tính hiệu quả sản xuất và sử dụng các nguồn lực đầu vào.

Tài liệu tham khảo

[1]. Sydsaeter, Knut. *Topics in Mathematical Analysis for Economists*, Academic Press, 1981.

[2]. John H. Hubbard, Barbara Brunke Hubbard, *Vector Calculus, Linear Agebra and Differential Forms*: *A Unified Approach* (2nd Ed.), Pearson College Div. September 15, 2001.

[3]. Charler Chapman Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer, 2015.

[4]. Iain Frasier, *The Cobb – Douglass Production Function*: *An Antipodean Defense*, Economics Issue, Vol. 7, 2002, p. 39.

[5]. Bozenar Gadjzick and Remigiusz Gawlik, *Choosing the Production Function Models for an Optimal Measurment of the Restructuring Efficiency of the Polish Metalurgical Sector in Years 2010-2015*, Metals, Vol. **8**, 2018, p. 23.

[6]. Janusz Jaworski, *Decision Aspects of the Spillman Production Function*; Canadian Journal of Agricultural Economics, Vol. **25**, Iss. 3, 1977, p. 48.

[7]. Mary Ellen Embleton, *A Comparision of Alternative Production Function Models using non-Nested Hypothesis Tests*, A thesis of Master of Science in Applied Economics, Montana State University, September 1987.